

Rozszerzony program matematyki w gimnazjum.

Poradnik nauczyciela matematyki.

Autor: Prof. Wojciech Guzicki

„[...] chciałbym zacząć od krótkiej refleksji nad tym, dlaczego uczyć matematyki w szkole. Do czego matematyka jest w ogóle uczniom potrzebna? Dlaczego jej uczymy? Dlaczego wreszcie ja jej uczyć? Na ten temat można napisać całe tomy; ja chcę ograniczyć się do kilku uwag o podstawowym dla mnie znaczeniu. Uczę matematyki z trzech powodów, które — moim zdaniem — będą w przyszłości kształtowały moich uczniów. Oto te powody:

- matematyka jest użyteczna;
- matematyka porządkuje nasz sposób myślenia;
- matematyka jest piękna.

Omówię krótko te powody. O użyteczności matematyki jest dzisiaj przekonany prawie każdy, choć wiele osób nie zdaje sobie sprawy z zakresu tej użyteczności. Używamy prostej matematyki w codziennych obliczeniach: robimy budżet domowy, zawieramy umowy kredytowe, zastanawiamy się, ile kupić farby na pomalowanie ścian pokoju, czy ile kupić trawy na obsianie ogródka itp. Rzadziej myślimy o poważniejszych zastosowaniach matematyki. Ian Stewart pisze o tym w swojej książce *Listy do młodego matematyka* ([Stewart]) już w pierwszym rozdziale:

Myślę czasami, że najlepszą metodą zmiany społecznego podejścia do matematyki byłyby czerwone nalepki na wszystkim, co jest związane z matematyką. „Uwaga, matematyka”. Taką nalepkę widać byłoby oczywiście na każdym komputerze; obawiam się, że gdybyśmy chcieli potraktować pomysł dosłownie, to widać byłoby ją także na czole każdego nauczyciela matematyki. Ale powinniśmy taki czerwony matematyczny znaczek nakleić także na każdym bilecie lotniczym, każdym telefonie, każdym samochodzie, każdym samolocie, każdym warzywie. . .

Dalej Stewart przekonuje, że umieszczenie w tym wykazie warzyw nie było przypadkowe, pokazując związku między matematyką i biologią. . . I wiele

stron jeszcze poświęca pokazaniu roli matematyki w dzisiejszym świecie. Cóż, ja dodałbym, że naprawdę wiele byłoby przedmiotów z tą naklejką: od najprostszych przedmiotów użytku codziennego po tomograf komputerowy.

Co to znaczy, że matematyka porządkuje nasz sposób myślenia? Przede wszystkim uczy rozumowania opartego na ścisłych regułach logiki. Uczy wyobraźni. Co to jest wyobraźnia przestrzenna, wie właściwie każdy; zwłaszcza ci, którzy zarzekają się, że jej nie posiadają. W pewnym stopniu ma ją każdy — umiemy sobie na przykład wyobrazić, jak wygląda oglądany przedmiot z drugiej strony. Wiele osób umie wyobrazić sobie szachownicę po wykonaniu dwóch ruchów lub swoje karty po zagranie dwóch lew w brydżu. Ale co wyobraźnia przestrzenna ma wspólnego z porządkowaniem sposobu myślenia? Otóż nie tylko umiemy sobie wyobrazić różne rzeczy, których nie widzimy, ale także umiemy wywnioskować, jakie mają własności, do czego się przydają, umiemy wyciągnąć wnioski, co nastąpi w szachach lub brydżu itp. Ale wyróżniam jeszcze jeden rodzaj wyobraźni: formalną. Wykonujemy obliczenia i wyobrażamy sobie, jak będzie wyglądać wynik; czy przyda nam się dalej, czy będzie bezużyteczny; czy te obliczenia mogą prowadzić do rozwiązania zadania, czy raczej „wyprowadzają nas w pole”.

Umiemy przeprowadzać rozumowania przez analogię i przez rozpatrzenie wszystkich przypadków. Umiemy stwierdzić, czy rzeczywiście przeanalizowaliśmy wszystkie możliwości. Umiemy w swoich rozumowaniach opierać się na podobnych rozumowaniach wykonanych w przeszłości, ale umiemy także oderwać się od sposobu rozumowania typowego dla danej sytuacji i poszukać czegoś innego. Umiemy przyjrzeć się wykonanym obliczeniom i dostrzec w wynikach coś wspólnego, jakąś prawidłowość,

której wcześniej nie dostrzegaliśmy i która może okazać się tym kluczowym, brakującym krokiem na drodze do rozwiązania. Każdy matematyk czegoś takiego kiedyś doświadczył; matematyka uczy nas takich sposobów myślenia. To są sposoby myślenia przydatne w każdej sytuacji; w matematyce dostrzegamy je najwcześniej i z pewnością można powiedzieć, że matematyka uczy nas ich najlepiej.

A co to znaczy, że matematyka jest piękna? Pojęcie piękna przede wszystkim kojarzy się z pięknem zmysłowym. Widzimy piękny obraz, piękne góry i piękny zachód słońca. Słuchamy pięknej muzyki, pięknego śpiewu ptaków i pięknego szumu górskiego potoku. Zachwycamy się pięknym zapachem kwiatów, perfum i podawanej na stół wspaniałej potrawy. Za chwilę zachwycimy się jej — chyba można powiedzieć — pięknym smakiem. A po wspaniałej uczcie zachwycimy się cudownie pięknym dotykiem fotela, na którym odbędziemy sjęstę. Tyle zmysły. Ale przecież jest jeszcze inne piękno: w czasie sjęsty nie musimy spać, śniąc piękne sny; możemy wziąć dobrą książkę i zachwycać się pięknem literatury. A gdzie w tym wszystkim jest matematyka? Czy chcę powiedzieć, że piękna jest strona podręcznika zadrukowana znaczkami niezrozumiałymi dla większości ludzi?

Jest coś takiego jak piękno rozumowania. Piękno myśli ludzkiej. Nie dotyczy ono wyłącznie matematyki. Odkrycia: szczepionek, struktury DNA i w konsekwencji kodu genetycznego, czy lasera wraz z jego rozlicznymi zastosowaniami, to były odkrycia wynikające z wieloletnich czasami doświadczeń, analizowania wyników tych doświadczeń, podążania błędnymi ścieżkami, uwieńczone w końcu sukcesem. To na pewno były piękne odkrycia, będące wynikiem pięknych rozumowań. Ale matematyka pokazuje nam myśl w stanie czystym, nieskażonym żadnym doświadczeniem. To jakby myśl wyabstrahowana ze wszelkich zastosowań. I ta czysta myśl, czyste rozumowanie, może być nazwane pięknym.

Piękno ma to do siebie, że nie przez wszystkich jest dostrzegane i odczuwane. Są osoby, których

nie zachwyca malarstwo i chcą w nim widzieć tylko odwzorowanie rzeczywistości. Nie zachwyca ich piękno gór widzianych ze szczytu, bo bardziej myślą o zmęczeniu. Nie wszyscy zachwycają się muzyką czy zapachem świeżo skoszonej łąki. Nie wszyscy dostrzegają piękno rozumowania matematycznego. Ale są osoby, na których niezwykle wrażenie wywarły piękne dowody twierdzeń matematycznych. Paul Erdős, wielki matematyk węgierski XX wieku, mówił, że Bóg ma taką księgę, w której są zapisane najdoskonalsze, tzn. najpiękniejsze dowody twierdzeń matematycznych i czasem tylko, w swej dobroci, pozwala nielicznym ujrzeć jej kawałek (zob. [Księga]). Jak pisał G. H. Hardy „nie ma na świecie miejsca dla brzydkiej matematyki”. Każdy, kto studiował matematykę, musiał zachwycić się niejednym dowodem, dostrzegając w nim niezwykle piękno. Dla mnie było to przede wszystkim twierdzenie Gödla i twierdzenie o niezależności hipotezy continuum, ale zachwycali mnie także twierdzenia algebry, topologii czy analizy funkcjonalnej. Każdy matematyk ma z pewnością takie swoje „najpiękniejsze” twierdzenie, które być może zadecydowało ostatecznie o jego przyszłości.

Piękno matematyki nie musi odwoływać się do tak poważnych twierdzeń i teorii. Książka Dowody z Księgi zaczyna się od niezwykle pięknego dowodu twierdzenia o nieskończoności zbioru liczb pierwszych. Dowód jest niezwykle krótki i zachwyca swoją prostotą. Przytoczę go w całości. Przypuśćmy, że istnieje tylko skończenie wiele liczb pierwszych: $p_1, \dots, p_n$. Weźmy liczbę $N = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ i jej dzielnik pierwszy p . Żadna z liczb $p_1, \dots, p_n$ nie jest dzielnikiem N (dzielenie daje resztę 1), ale p jest dzielnikiem N . Zatem liczba pierwsza p jest różna od każdej ze **wszystkich** liczb pierwszych $p_1, \dots, p_n$.

Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia. Nie znam matematyka, który nie zachwyciłby się tym dowodem, widząc go po raz pierwszy. A przecież ten dowód jest tak prosty, że można go pokazać uczniom w szkole.

No właśnie, w jakiej szkole? [...]